CAPITULO 3

SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD

Por ENRIQUE ALARCON

1. EL SISTEMA MASA - MUELLE

El modelo matemático más sencillo para representar el sistema con un grado de libertad está formado por el acoplamiento de dos elementos: una masa que se mueve con respecto al sistema de referencia y unido a ella un muelle de comportamiento lineal.

La característica de aquélla consiste en su capacidad para introducir una fuerza de inercia en cuanto exista una aceleración y la del muelle en la presentación de una resistencia al movimiento que es linealmente proporcional al desplazamiento. Si llamamos x a este último referido a las traslaciones de la barra infinitamente rígida $A\,B$ el equilibrio se escribirá, utilizando el teorema de D'Alembert

$$m\ddot{x} + k\,x = 0$$

que, haciendo

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

se transforma en $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ con la conocida solución

$$x = A\ \mathrm{sen}\ \omega\,t + B\ \cos\ \omega\,t$$

Si en el instante inicial

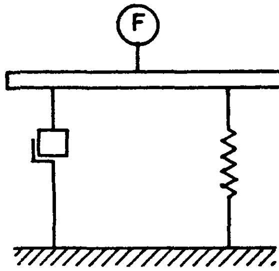
$$t = 0 \quad \begin{cases} x = X_o \\ \dot{x} = V_o \end{cases}$$

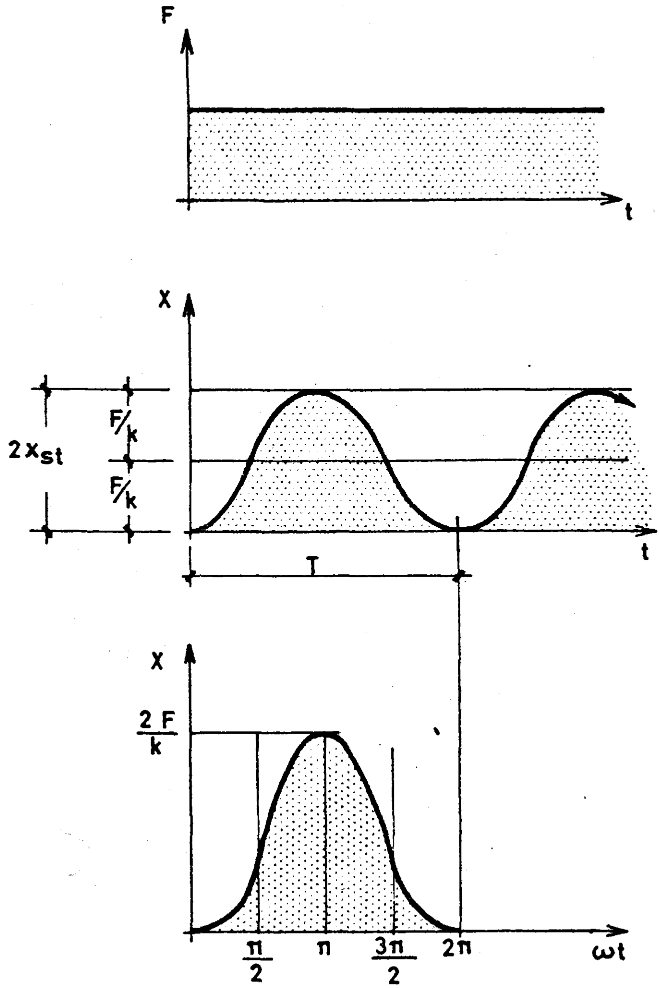
obtendríamos

$$\left.\begin{array}{l} X_o = B \\ \\ V_o = A\,\omega \end{array}\right| \begin{array}{l} B = X_o \\ \\ A = V_o\sqrt{\dfrac{m}{k}} \end{array}$$

y por tanto

$$x = V_o\sqrt{\frac{m}{k}}\ \mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) + X_o\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right)$$





RESPUESTA DEL SISTEMA A UNA FUERZA BRUSCAMENTE APLICADA DE VALORES CONSTANTES

Si $X_o = 0$ es decir, se parte del reposo queda solo el primer sumando que representa un movimiento oscilatorio de frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

y por tanto de frecuencia

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

o período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

con elongación máxima o amplitud de valor

$$\frac{V_o}{\omega} = V_o \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Son las vibraciones libres del sistema.

Si además actúa una fuerza de valor constante F sobre la barra el movimiento se llama forzado.

$$m\ddot{x} + kx - F = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = F$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m}$$

$$x = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t + \frac{F}{m w^2}$$

Con las condiciones iniciales $t = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = B + \dfrac{F}{m w^2} \\ \\ 0 = A\omega \end{array} \right\} \begin{array}{l} B = -\dfrac{F}{m w^2} \\ \\ A = 0 \end{array}$$

$$\boxed{x = \frac{F}{m w^2} (1 - \cos \omega t)}$$

Si F es el peso y la carga es estática

$$x_{st} = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega^2} \qquad \boxed{x = \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)}$$

El valor máximo sería para

$$\cos \omega t = -1, \quad \boxed{x = 2\, x_{st}}$$

Si la fuerza no está constantemente aplicada a lo largo del tiempo, sino que interrumpe su actuación en el instante $t = t_o$ la ley anterior se interrumpe en él con las condiciones

$$(x)t_o = A \operatorname{sen} \omega t_o + B \cos \omega t_o + \frac{F}{m\, w^2}$$

$$(\dot{x})\, t_o = A\, \omega \cos \omega t_o - B\, \omega \operatorname{sen} \omega t_o$$

que deberán ser introducidas como condiciones iniciales en la ecuación del movimiento libre. Por ejemplo, en el caso anterior

$$\left\{ \begin{aligned} (x)\, t_o &= \frac{F}{m\, w^2} (1 - \cos \omega t_o) \\ (\dot{x})\, t_o &= \frac{F}{m\, w^2} \operatorname{sen} \omega t_o \end{aligned} \right.$$

y

$$x(t_o + \tau) = A \operatorname{sen} \omega \tau + B \cos \omega t$$

Si $\tau = 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{F}{m\, w^2} (1 - \cos \omega t_o) &= B \\ \frac{F}{m\, w^2} \operatorname{sen} \omega t_o &= A\, \omega \end{aligned} \right| \qquad x(t_o + \tau) = \frac{F}{m\, w^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \omega t_o}{w} \operatorname{sen} \omega \tau + (1 - \cos \omega t_o) \cos \omega \tau \right]$$

Como $t_o + \tau = t$, $\tau = t - t_o$

y la ley completa del movimiento será:

Para $t < t_o$

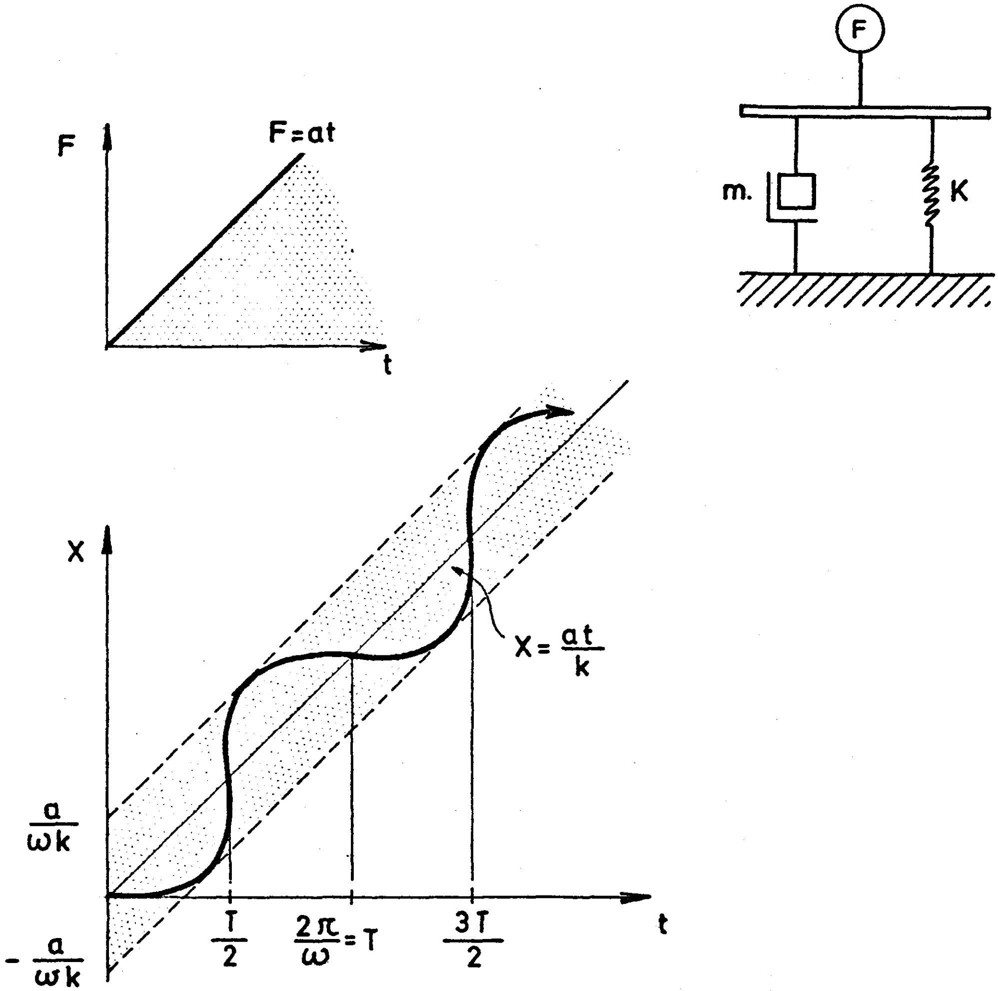
$$x = \frac{F}{m\, w^2} (1 - \cos \omega t)$$

Para $t > t_o$

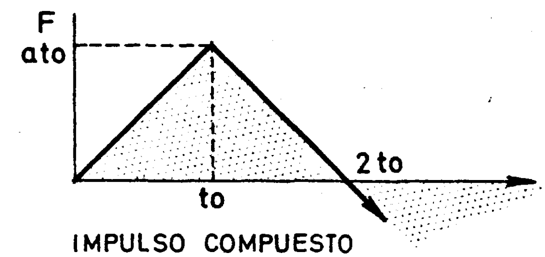
$$x = \frac{F}{m\, w^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \omega t_o}{w} \operatorname{sen} \omega (t - t_o) + (1 - \cos \omega t_o) \cos \omega (t - t_o) \right]$$

También puede suceder que la fuerza aplicada dependa del tiempo $F(t)$ en cuyo caso el proceso de integración puede ser más complicado.

Si por ejemplo $F(t) = a\, t$ siendo a una constante



RESPUESTA DEL SISTEMA A UNA FUERZA PROPORCIONAL AL TIEMPO



IMPULSO COMPUESTO

la ecuación representativa sería

$$m\ddot{x} + k\,x = at. \quad , \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{a}{m}\,t$$

con la solución

$$\boxed{x = A\ \mathrm{sen}\ \omega\,t + B\ \cos\ \omega\,t + \frac{a}{m\,w^2}\,t}$$

Si, de nuevo, para

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{array} \right.$$

obtenemos para A y B

$$\left. \begin{array}{l} 0 = B \\ 0 = A\,\omega + \dfrac{a}{m\,w^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} B = 0 \\ A = -\dfrac{a}{m\,w^3} \end{array}$$

$$\boxed{x = \frac{a}{m\,w^3}\,(w\,t - \mathrm{sen}\ \omega\,t)}$$

Un caso interesante se podría presentar cuando para $t = t_o$ el impulso decreciera según

$$F\,(t_o + \tau) = -\,a\,(\tau - t_o) = -\,a\,(t - 2\,t_o)$$

Las condiciones iniciales son $t = t_o$

$$\tau = 0 \left\{ \begin{array}{l} (x)_{to} = \dfrac{a}{m\,w^3}\,(w\,t_o - \mathrm{sen}\ \omega\,t_o) \\ (\dot{x})_{to} = \dfrac{a\,w}{m\,w^3}\,(1 - \cos\ w\,t_o) \end{array} \right.$$

y la ecuación del movimiento

$$\ddot{x} + w^2\,x = \frac{-\,a}{m}\,(\tau - t_o)$$

con solución

$$x = A\ \mathrm{sen}\ \omega\,\tau + B\ \cos\ \omega\,\tau - \frac{a}{m\,w^2}\,(\tau - t_o)$$

Las condiciones iniciales anteriores permiten escribir

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a}{m\,w^3}(\omega\, t_o - sen\;\omega\, t_o) = B - \frac{a}{m\,w^2}(\tau - t_o) \\ &\frac{a}{m\,w^3}(1 - cos\;\omega\, t_o) = A - \frac{a\,w}{m\,w^3} \end{aligned}\right\}\quad \tau = t - t_o$$

$$B = \frac{a}{m\,w^3}\left[\,\omega\, t_o - sen\;\omega\, t_o + w\,(t - 2\,t_o)\,\right] = \frac{a}{m\,w^3}\left[\,w\,(t - t_o) - sen\;\omega\, t_o\,\right]$$

$$A = \frac{a}{m\,w^3}(1 + w - cos\;\omega\, t_o)$$

$$x = \frac{a}{m\,w^3}\left\{(1 + w - cos\;\omega\, t_o)\,sen\;\omega\,(t - t_o) + \left[\,\omega\,(t - t_o) - sen\;\omega\, t_o\right] cos\;\omega\,(t - t_o) - \right.$$

$$\left. - w\,(t - 2\,t_o)\right\}$$

En el instante $t = 2\,t_o$

$$(x)_{2\,t_o} = \frac{a}{m\,w^3}\left\{(1 + w - cos\;\omega\, t_o)\,sen\;\omega\, t_o + \left[\,\omega\, t_o - sen\;\omega\, t_o\,\right] cos\;\omega\, t_o\right\} =$$

$$= \frac{a}{m\,w^3}\left[\,sen\;\omega\, t_o + w\;sen\;\omega\, t_o - 2\,cos\,\omega\, t_o\;sen\,\omega\, t_o + w\, t_o\;cos\;\omega\, t_o\,\right] =$$

$$= \frac{a}{m\,w^3}\left[\,(1 + w)\,sen\;\omega\, t_o + \omega\, t_o\;cos\;\omega\, t_o - 2\,cos\,\omega\, t_o\;sen\;\omega\, t_o\,\right]$$

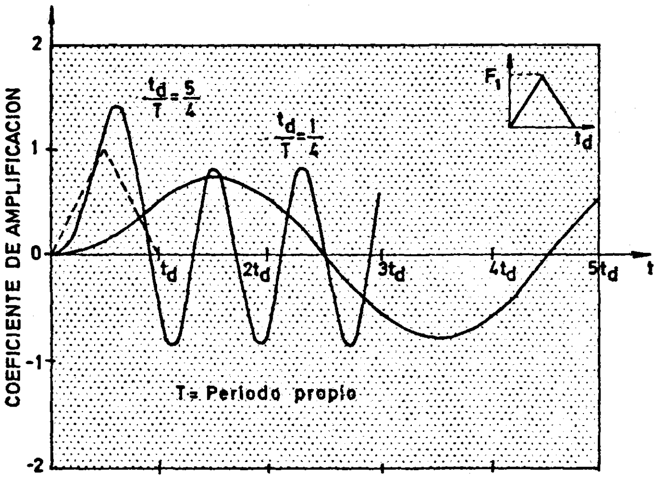
$$(\dot{x})_{2\,t_o} = \frac{a}{m\,w^3}\left\{(1 + w - cos\;\omega\, t_o)\,\omega\;cos\;\omega\, t_o - \right.$$

$$\left. - (\omega\, t_o - sen\;\omega\, t_o)\,w\;sen\;\omega\, t_o + \omega\;cos\;\omega\, t_o - \omega\right\} =$$

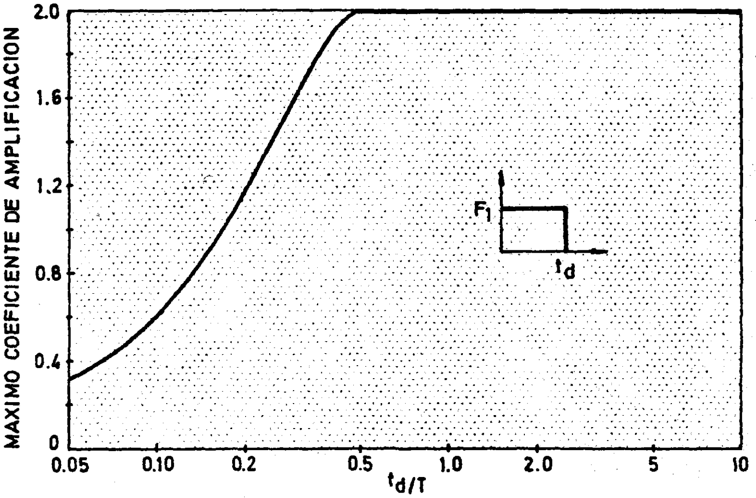
$$= \frac{a}{m\,w^3}\left\{\,2\,\omega\;cos\;\omega\, t_o + w^2\;cos\;\omega\, t_o - \omega\,(1 - sen^2\;\omega\, t_o)\right.$$

$$\left. - w^2\, t_o\;sen\;\omega\, t_o + w\;sen^2\;\omega\, t_o - \omega\right\} =$$

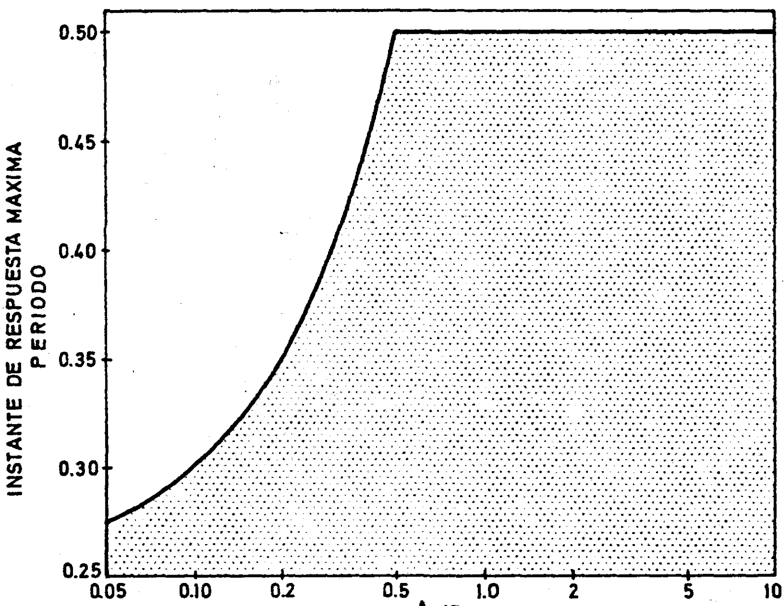
$$= \frac{a}{m\,w^3}\left[\,2\,w\,(cos\;\omega\, t_o - 1) + 2\,w\;sen^2\,\omega\, t_o + w^2(cos\;\omega\, t_o - t_o\;sen\;\omega\, t_o)\right]$$



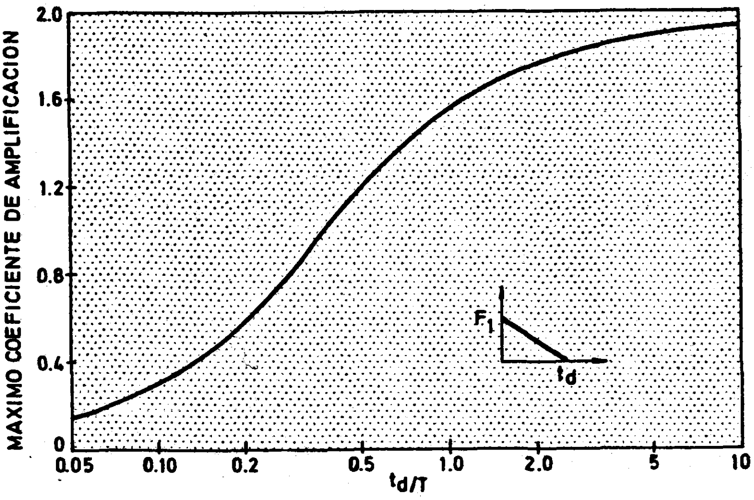
RESPUESTA A UN IMPULSO TRIANGULAR


MAXIMO COEFICIENTE DE AMPLIFICACION
2.0
1.6
1.2
0.8
0.4
0
0.05
0.10
0.2
0.5
1.0
2.0
5
10
t_d/T
F_1
t_d

(a)

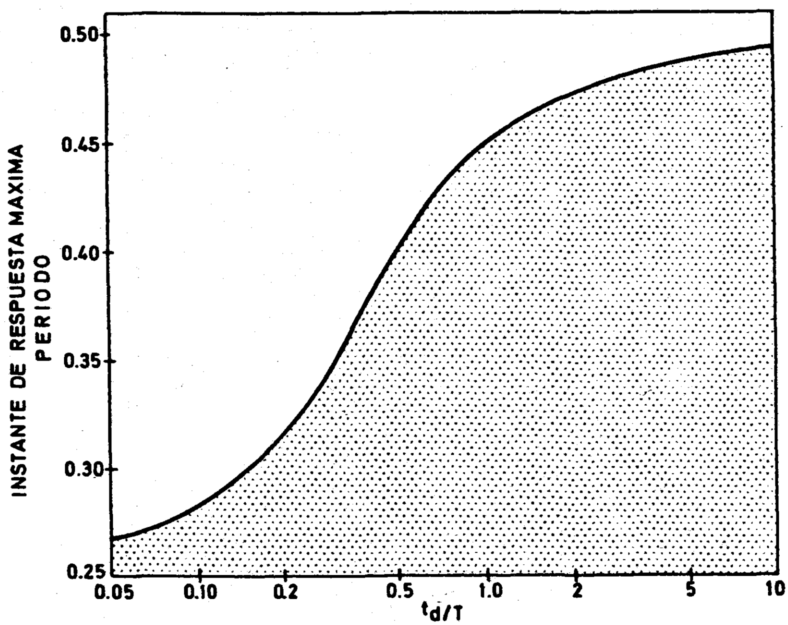

INSTANTE DE RESPUESTA MAXIMA
PERIODO
0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0.05
0.10
0.2
0.5
1.0
2
5
10
t_d/T

(b)



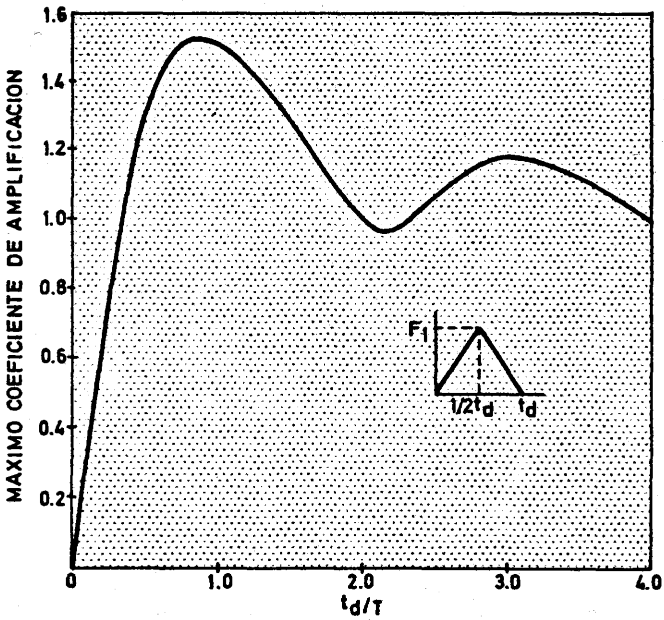
MAXIMO COEFICIENTE DE AMPLIFICACION
2.0
1.6
1.2
0.8
0.4
0
0.05
0.10
0.2
0.5
1.0
2.0
5
10
t_d/T
F_1
t_d

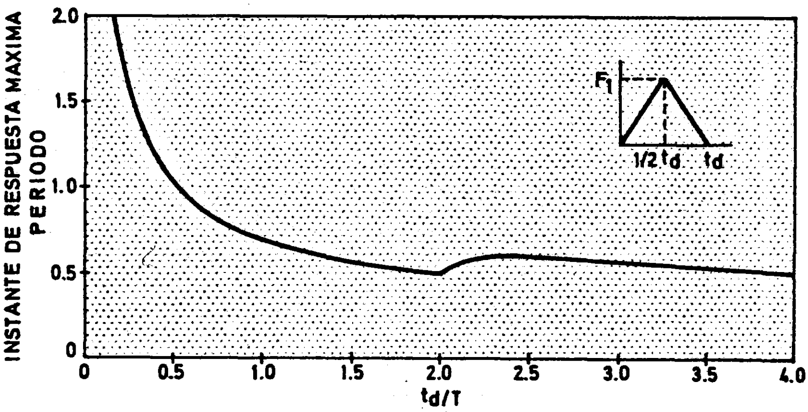
(a)

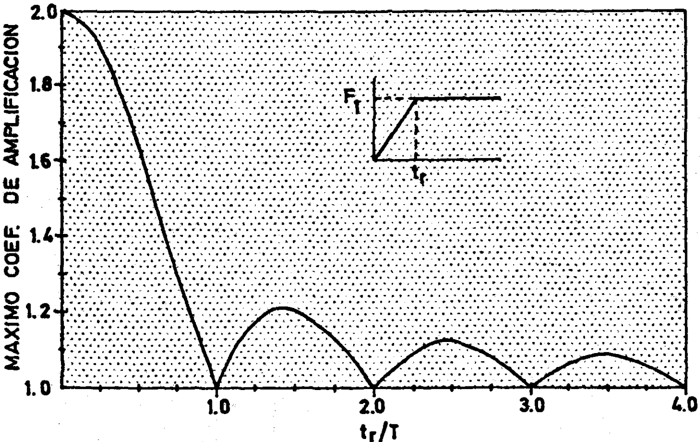


INSTANTE DE RESPUESTA MAXIMA
PERIODO
0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0.05
0.10
0.2
0.5
1.0
2
5
10
t_d/T

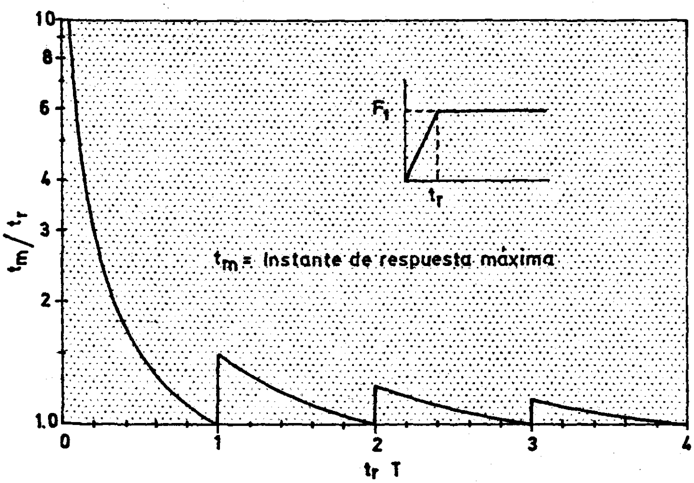
(b)


1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
MAXIMO COEFICIENTE DE AMPLIFICACION
F_1
1/2 t_d
t_d
0
1.0
2.0
3.0
4.0
t_d/T
(a)


2.0
1.5
1.0
0.5
0
INSTANTE DE RESPUESTA MAXIMA
PERIODO
F_1
1/2 t_d
t_d
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
t_d/T
(b)


MAXIMO COEF. DE AMPLIFICACION
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
1.0
2.0
3.0
4.0
F_r
t_r
t_r/T

(a)


10
8
6
4
3
2
1.0
0
1
2
3
4
F_r
t_r
t_m/t_r
t_m = Instante de respuesta máxima
t_r T

(b)

Si en este instante se interrumpe la actuación de F nos encontramos de nuevo ante un problema de vibraciones libres en el que las condiciones iniciales serían las anteriores.

En este caso diríamos que nuestro modelo ha estado sometido a un impulso triangular. Del mismo modo se concibe la posibilidad de impulsos rectangulares, senoidales, etc.

El estudio en todos los casos se realiza como en el anterior.

Una presentación muy interesante de resultados es la realizada por Jacobsen y Ayre a los que son debidos los gráficos que se acompañan. En ellos se define el coeficiente de mayoración dinámica como el cociente entre el máximo valor del desplazamiento y el correspondiente a la aplicación estática de la carga.

Si la fuerza externa no es periódica y ponemos

$$m \ddot{x} + k x = P(t)$$

$$\ddot{x} + w^2 x = \frac{P(t)}{m}$$

al multiplicar ambos términos por $\operatorname{sen} \omega (t-\tau)$ e integrar desde τ cero a t

$$\int_0^t \ddot{x} \operatorname{sen} \omega (t-\tau)\, d\tau + \omega^2 \int_0^t x \operatorname{sen} \omega (t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{m} \int_0^t P \operatorname{sen} \omega (t-\tau)\, d\tau$$

Cuyo primer miembro, mediante el sistema de integración por partes, se convierte en

$$\dot{x} \operatorname{sen} \omega (t-\tau) \Big|_0^t + \omega \int \dot{x} \cos \omega (t-\tau) + \omega \quad x \cos \omega (t-\tau) \quad - \Big|_0^t - \omega \int \dot{x} \cos \omega (t-\tau) =$$

$$\boxed{= - \dot{x}_0 \operatorname{sen} \omega t + \omega x - \omega x_0 \cos \omega t}$$

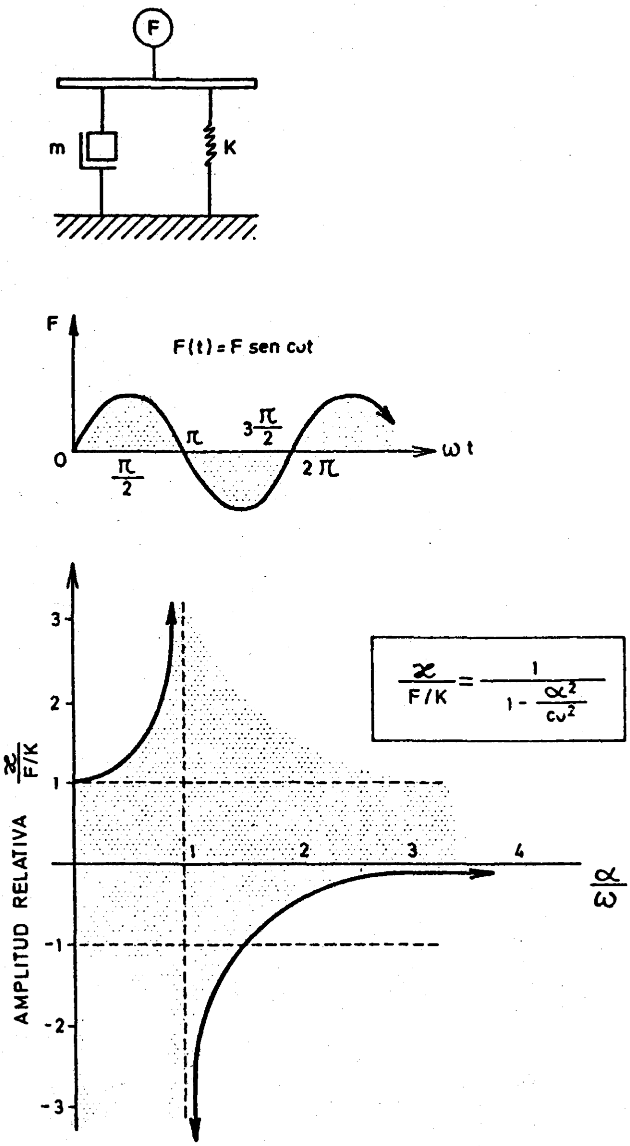
es decir

$$\omega x = \omega x_0 \cos \omega t - \dot{x}_0 \operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{m} \int P \operatorname{sen} \omega (t-\tau)\, d\tau$$

o bien, la solución

$$\boxed{x = x_0 \cos \omega t - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \operatorname{en} \omega t + \frac{1}{m} \int_0^t P(\tau) \operatorname{sen} \omega (t-\tau)\, d\tau}$$

Si la forma de $F(t)$ es más compleja se emplean con éxito los métodos de Fourier. Como paso previo veamos la posibilidad de estudiar la respuesta del modelo a $F(t) = F e^{iat}$ siendo F una constante compleja



RESPUESTA DEL SISTEMA A UNA FUERZA SENOIDAL

$$m\ddot{x} + kx = F e^{iat}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} e^{iat}$$

Sea

$$\left.\begin{array}{l} x = A e^{i\beta t} \\ \dot{x} = iA\beta e^{i\beta t} \\ \ddot{x} = -A\beta^2 e^{i\beta t} \end{array}\right| \quad -A\beta^2 e^{i\beta t} + A w^2 e^{i\beta t} = \frac{F}{m} e^{iat}$$

$$\left| \begin{array}{l} \beta = a \\ -A(a^2 - w^2) = \dfrac{F}{m} \\ A = -\dfrac{F}{m(a^2 - w^2)} \end{array}\right.$$

Es decir

$$x = -\frac{F}{m(a^2 - w^2)} e^{iat}$$

Si además se suma la solución $B e^{i\omega t}$ donde B es compleja obtenemos que es la solución general del problema.

$$\boxed{x = B e^{i\omega t} - \frac{F}{m(a^2 - w^2)} e^{iat}}$$

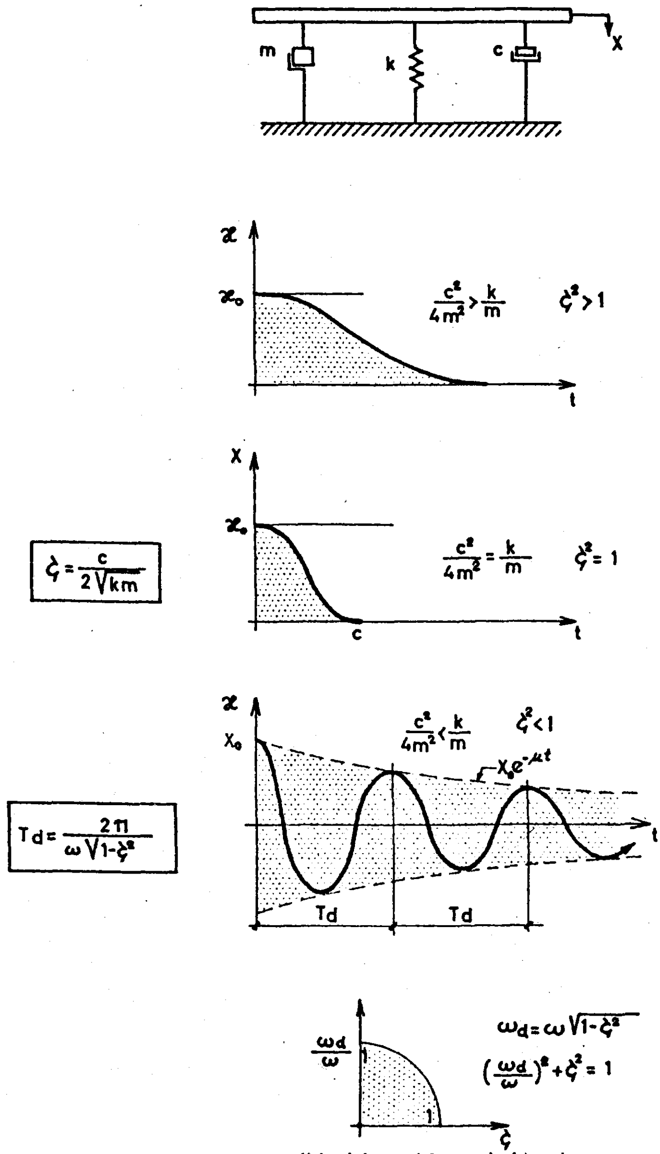
La constante compleja B se fija de acuerdo con las condiciones iniciales según costumbre.

En el caso de una $F(t)$ periódica siempre (con las condiciones matemáticas conocidas, ver apéndice) podremos desarrollar en serie

$$F(t) = \Sigma C_n e^{i(a_n - \phi_n)t}$$

y aplicar el resultado anterior.

También se puede utilizar el método de las transformaciones integrales que permite manejar ecuaciones algébricas en lugar de ecuaciones diferenciales. Más adelante volveremos sobre el



Valor de la pseudofrecuencia del movimiento amortiguado en función del grado de amortiguamiento

VIBRACIONES LIBRES DEL SISTEMA CON AMORTIGUAMIENTO LINEAL VISCOSO tema.

2. PRESENCIA DE AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

Consideramos ahora un modelo ligeramente más complicado, en el que se halla presente, además de la masa y el muelle, un elemento que reacciona linealmente con una fuerza proporcional a la velocidad del desplazamiento. Llamaremos émbolo a este nuevo componente.

El equilibrio se escribe ahora en la forma

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0$$

para el caso de las vibraciones libres y

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F(t)$$

para las vibraciones forzadas.

En el primer caso

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

si seguimos haciendo

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

y llamamos

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k m}} \quad ; \quad \ddot{x} + 2 \zeta \omega \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Busquemos una solución del tipo

$$x = A e^{a_1 t} + B e^{a_2 t}$$

La ecuación característica es

$$a^2 + 2 \zeta \omega a + \omega^2 = 0$$

con soluciones

$$a = \frac{-2 \zeta \omega \pm \sqrt{4 \zeta^2 \omega^2 - 4 \omega^2}}{2}$$

Si $\zeta^2 > 1$ las soluciones son reales y no hay comportamiento oscilante.

Si

$$\zeta^2 = 1 \;,\; a_{1,2} = - \zeta \omega = - \frac{c}{2\sqrt{km}} \sqrt{\frac{R}{m}} = - \frac{c}{2 m}$$

Es el caso critico

$$\frac{c^2_{crit.}}{4 km} = 1 \;, \quad c_{crit} = \sqrt{4 km} \qquad \zeta = c / c_{crit.}$$

Si $\zeta^2 < 1$ se producen soluciones imaginarias que, responden a un movimiento con

$$a = (-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})\,\omega$$

y por ello

$$\boxed{x = A\, e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\,\omega\, t} + B\, e^{(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\,\omega\, t}}$$

Si introducimos el nuevo cambio

$$\frac{c}{2m} = \mu = \zeta\,\omega$$

$$p = \sqrt{\omega^2 - \omega^2 \zeta^2}$$

$$x = A\, e^{(-\mu + i\,p)t} + B\, e^{(-\mu - i\,p)t} =$$

$$= A\, e^{-\mu t}\, e^{ipt} + B\, e^{-\mu t}\, e^{-ipt} =$$

$$= e^{-\mu t}[\,A\, e^{ipt} + B\, e^{-ipt}\,] = e^{-\mu t}[\,A\,(\cos pt + i \operatorname{sen} pt) + B\,(\cos pt - i \operatorname{sen} pt)\,]$$

$$\boxed{x = e^{-\mu t}[\,(\cos p\,t)(A + B) + (i \operatorname{sen} p\,t)(A - B)\,]}$$

que también se puede expresar como

$$\boxed{x = D\, e^{-\mu t}\, e^{i\,p\,t}}$$

si D es una constante compleja.

Se presenta un movimiento oscilatorio de pseudo-frecuencia circular

$$\omega_d = p = \omega\sqrt{1-\zeta^2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

y cuya amplitud decrece amortiguada en el tiempo por el factor $e^{-\mu t}$

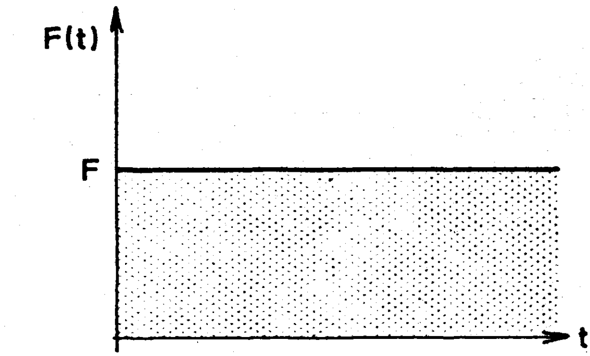
La diferencia entre dos amplitudes máximas se produce con un decalaje

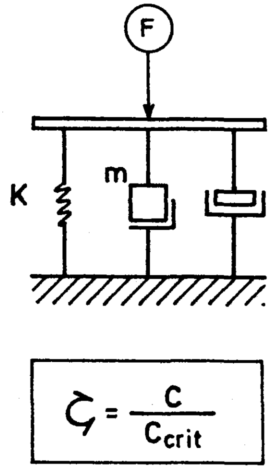
$$p = \frac{2\pi}{T} = \omega_d$$

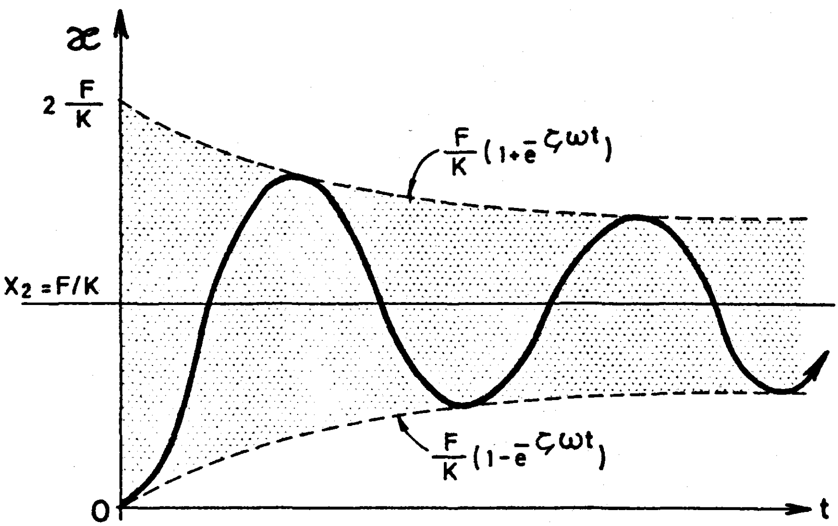
de tal modo que

$$x\,(t+T) = e^{-\mu t}[\,(A+B)\cos p\left(t + \frac{2\pi}{p}\right) + i \operatorname{sen} p\left(t + \frac{2\pi}{p}\right)]\, e^{-\mu T} = e^{-\mu T}.\, x(t)$$

$$\boxed{\frac{x\,(t+T)}{x\,(t)} = e^{-\mu T}}$$







$$X = \frac{F}{K}\left[1 - e^{-\zeta\omega t}(\cos \mathrm{cot} + \zeta \,\mathrm{sen}\,\omega t)\right.$$

RESPUESTA DEL SISTEMA EN REPOSO A UNA FUERZA CONSTANTE APLICADA BRUSCAMENTE.

Por ello a

$$\boxed{\mu T = \frac{2 \pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}$$

se le suele llamar decremento logaritmico y se toma como medida del grado de decrecimiento de la oscilación.

Para el caso de las vibraciones forzadas con amortiguamiento la ecuación

$$m x + c \dot{x} + k x = F (t)$$

presenta una solución compuesta de un primer sumando, o solución complementaria, igual a la del caso anterior, y la solución particular que depende de la forma de $F(t)$.

Debido a la presencia del amortiguamiento la vibración complementaria, o libre, desaparece al cabo del tiempo y por eso recibe el nombre de solución transitoria, quedando como único movimiento la parte representada por la solución particular que suele denominarse por ello solución estacionaria.

En lo que sigue nos vamos a ocupar solamente de esta última en una serie de casos.

Si F es constante, la solución $x_2 = \dfrac{F}{k}$

cumple los requisitos y deja la ecuación en la forma $x = x_1 + x_2$

$$m \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 + k x_1 = 0$$

que ofrece la respuesta transitoria. Cuando ésta desaparece, la masa queda fija en x_2.

Si F es armónica, por ejemplo,

$$F = F e^{iat}$$

La ecuación es

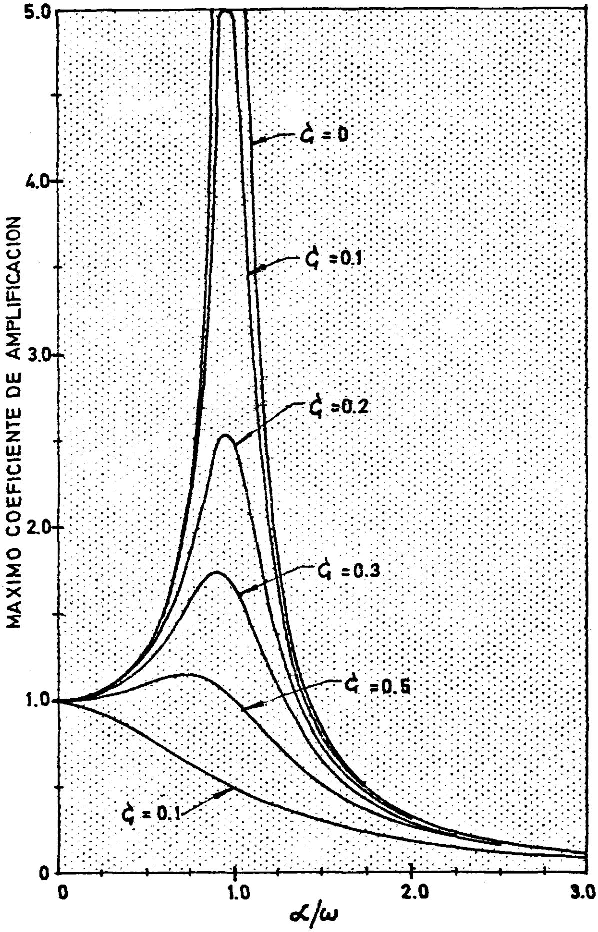
$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F e^{iat}$$

Si tomamos $x = A e^{iat}$

$$A \left[(k - a^2 m) + i c a \right] = F \longrightarrow A = \frac{F}{(k - a^2 m) + i c a} \qquad (F \text{ compleja})$$

De acuerdo con las notaciones anteriores;

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad , \quad c = 2 \zeta \sqrt{k m} = 2 \zeta m \omega$$



RESPUESTA DEL SISTEMA A UNA FUERZA OSCILANTE $Fe^{i\alpha t}$

por lo que

$$A = \frac{F}{m(\omega^2 - a^2) + 2i\zeta m\omega a}$$

La solución estacionaria sería pues

$$x = \frac{F e^{iat}}{m[(\omega^2 - a^2) + 2i\zeta\omega a]} \qquad (F \text{ compleja})$$

y la general

$$x = D e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega t} + \frac{F e^{iat}}{m[(\omega^2 - a^2) + 2i\zeta\omega a]} \qquad (D \text{ compleja})$$

Si llamamos impedancia mecánica a

$$Z(\omega) = m[(\omega^2 - a^2) + 2i\zeta\omega a]$$

su recíproca

$$H(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)}$$

es evidentemente la función de transferencia entre la entrada $F e^{iat}$ y la salida $H(\omega) F e^{iat}$

$H(\omega)$ recibe también el nombre de respuesta en frecuencia.

Usualmente solo la parte real de $F e^{iat}$ tiene un significado físico, y por ello sólo la parte real de $H(\omega) F e^{iat}$ será considerada como respuesta.

De lo anterior se deduce que esta última es un movimiento armónico de frecuencia igual a la de la fuerza excitatriz. Para la amplitud, utilizaremos el cociente de

$$\frac{x}{x_{st}} \qquad \text{donde} \qquad x_{st} = \frac{F}{k}$$

al que llamaremos factor de amplificación.

La curva muestra para valores

$$r = \frac{a}{\omega}$$

y ζ variables la importancia del mismo. En particular es curioso constatar que la amplitud no es máxima para el caso de resonancia $r = 1$.

Para un valor de F que oscile periodicamente siempre es posible el desarrollo en serie de Fourier

$$F = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{i a_n t}$$

y sería
$$x = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{F_n e^{i a_n t}}{m\,[(\omega^2 - a_n^2) + 2 i \zeta \omega a_n]}$$

Para estudiar el caso en que $F(t)$ tenga una expresión cualquiera vamos a utilizar un método un tanto diferente.

Utilizaremos como fase la función impulso unidad de Dirac que se define

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \neq 0 \\ \infty & si \quad t = 0 \end{cases}$$

con la condición
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = +1$$

y tomaremos como entrada
$$F(t) = C\,\delta(t) \qquad [\,C \text{ real}\,]$$

Si $C\,h(t)$ es la respuesta estacionaria
$$x = D\, e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\,\omega t} + C\,h(t) \qquad [\,D \text{ compleja}\,]$$

Para determinar $h(t)$ seguiremos el ingenioso método de Lin.

Si se impone la condicion de que la constante de la solución complementaria sea cero en el instante inicial, cuando el desplazamiento es cero
$$\boxed{C\,h(o) = 0}$$

Pero por otro lado, una vez sufrida la carga, la masa tiene un impetu
$$C = m\,\dot{x}(o)$$

Así pues
$$m\,C\,\dot{h}(o) = C \quad , \quad \boxed{C\,\dot{h}(o) = \frac{C}{m}}$$

Como, acto seguido, no existe carga la solución será la correspondiente a vibraciones libres con las anteriores condiciones de partida
$$x = (A + iB)\, e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\,\omega t} = C\,h(t)$$

Para
$$t = 0 \;,\; x = 0 \longrightarrow A = 0 \;,\; x = i B\, e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\,\omega t} = C\,h(t)$$
$$\dot{x} = i\,\omega B\,(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\, e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})}$$

Si

$$t = 0 \qquad \dot{x}(o) = \frac{C}{m} = -\omega B \sqrt{1-\zeta^2} - i\,\omega B \zeta$$

$$B = -\frac{C}{m\,\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \longrightarrow x = -\frac{C\,i}{m\,\omega\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\,\omega\, t}$$

Así pues

$$\boxed{h(t) = \frac{-i}{\sqrt{1-\zeta^2}\; m\,\omega}\, e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\,\omega\, t}}$$

La ecuación anterior se ha deducido con las condiciones iniciales de reposo previo a la aplicación del impulso. Si no es así será preciso añadir una solución de la forma

$$D\, e^{[-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}\,]\,\omega\, t} \qquad (D \text{ compleja})$$

para establecer las condiciones iniciales.

La utilidad de conocer la respuesta a funciones senoidales o impulsos radica en la posibilidad de reproducir en virtud del principio de superposición una función arbitraria como suma de las sinusoidales o impulsivas.

En efecto, dada una $f(t)$ cualquiera, que admita una transformada de Fourier

$$f(\overset{*}{a}) = \mathfrak{F}[\,f(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-i\,a\,t}\, dt$$

si para $t < 0 \quad f(t) = 0$ se puede escribir

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(a)\, e^{i\,a\,t}\, da$$

por lo que

$$x = B\, e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\,\omega\, t} + \int_{-\infty}^{\infty} H(a)\, f^*(a)\, e^{i\,a\,t}\, da$$

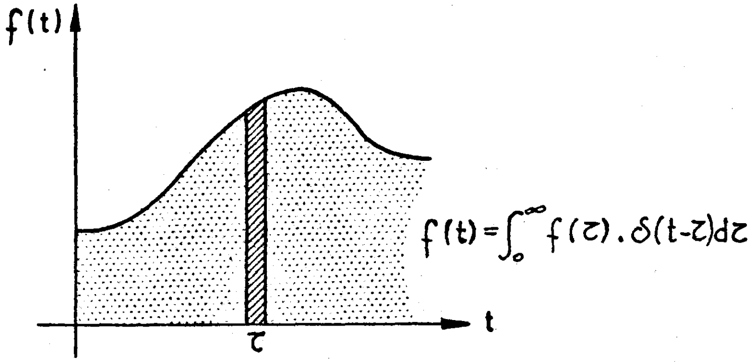
siendo

$$H(a) = \frac{1}{m\,(\omega^2 - a^2 + 2\, i\, \zeta\, \omega\, a)}$$

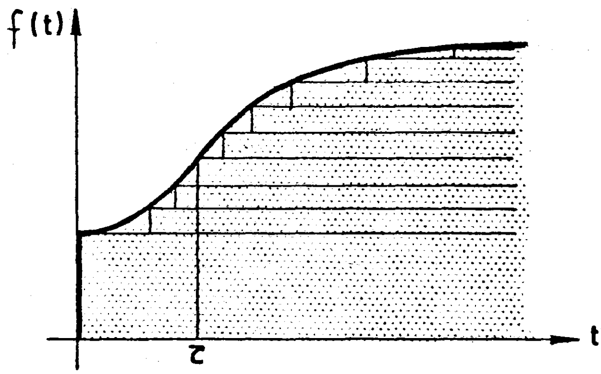
según sabemos.

En el caso de ver $f(t)$ como una sucesión de impulsos en cada instante τ, se escribiría

$$f(t) = \int_0^{\infty} f(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau$$



LA ENTRADA COMO SUMA DE IMPULSOS



LA ENTRADA COMO SUMA DE ESCALONES UNIDAD y la solución es ahora

$$x = D\, e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\,\omega\, t} + \int_0^{\infty} f(\tau)\, h\,(t-\tau)\, d\,\tau$$

o bien, como $h\,(t-\tau) = 0$ si $t-\tau < 0 \rightarrow \tau > t$

$$x = D\, e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\,\omega\, t} + \int_0^{t} f(\tau)\, h\,(t-\tau)\, d\,\tau$$

que es una generalización del resultado obtenido con el caso de no existir el amortiguamiento.

Aunque el concepto de convolución es más amplio (vease por ejemplo el excelente libro de Laurent Schwartz) nos limitaremos a llamar integral de convolución de dos funciones $F\,(t)$ y $G\,(t)$ al producto

$$F\,(t) * G\,(t) = \int_0^{t} F\,(\tau)\,.\,G\,(t-\tau)\, d\,\tau$$

Así pues el segundo sumando es una integral de convolución que, en nuestro caso particular, suele ser llamada segunda integral de Duhamel.

La primera integral de Duhamel se obtiene cuando la curva se expresa con las funciones de Heaviside y su dedución queda al cuidado del lector. (Ver problema nº 4).

El teorema de Borel establece que la convolución de dos funciones es la inversa del producto de sus transformadas rier:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{f^*\,(a)\, g^*\,(a)\} = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^*\,(a)\, g^*\,(a)\, e^{i\,a\,t}\, d\,a = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(\tau)\, g\,(t-\tau)\, d\,\tau$$

Ello es de la máxima importancia porque permitirá el uso de la transformación de Fourier para resolver los problemas de vibraciones transitorias y ver la equivalencia de los dos procedimientos esbozados (en el dominio del tiempo y de la frecuencia).

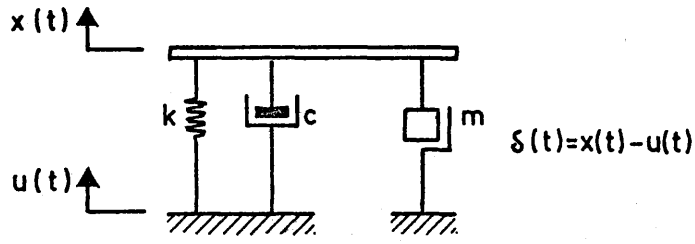
En efecto si solo se considera el estado estacionario

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} H\,(a)\, f^*\,(a)\, e^{i\,a\,t}\, d\,a = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(\tau)\, h\,(t-\tau)\, d\,\tau$$

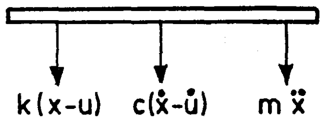
Si ahora ponemos

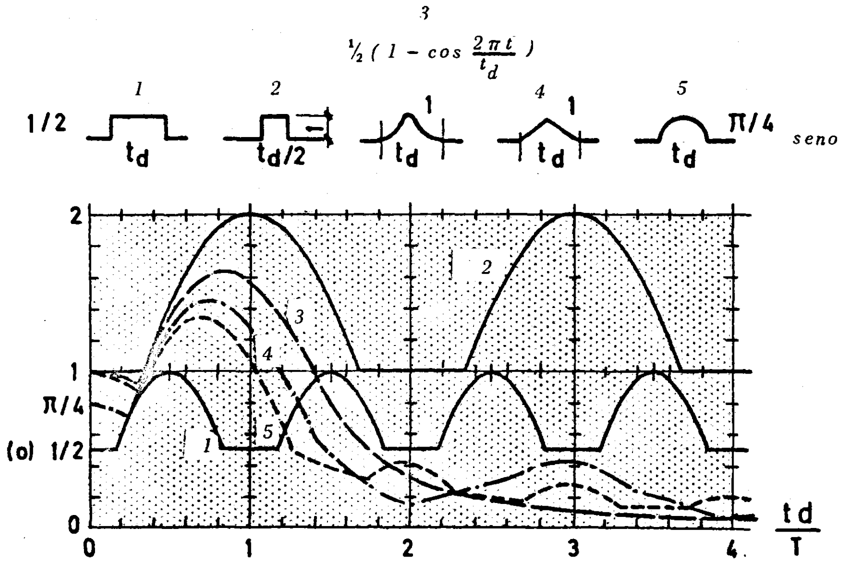
$$f^*\,(a) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\,(\tau)\, e^{-i\,a\,\tau}\, d\,\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H\,(a)\left(\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\,(\tau)\, e^{-i\,a\,\tau}\, d\,\tau\right) e^{i\,a\,t}\, d\,a = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(\tau)\, h\,(t-\tau)\, d\,\tau$$



EL SISTEMA SOMETIDO A UN MOVIMIENTO DEL SOPORTE





DISTORSION MAXIMA RELATIVA PARA VARIOS TIPOS DE IMPULSOS PROVOCADOS POR EL MOVIMIENTO DEL SUELO (SEGUN JACOBSEN Y AYRE).

se observa que

$$h(t-\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(a)\, e^{i\,a\,(t-\tau)}\, d\,a$$

y por ello

$$H(a)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\,a\,t}\, dt$$

es decir, salvo el factor $\frac{1}{2\pi}$,

$h(t)$ y $H(a)$ se comportan como transformadas de Fourier.

3. CUESTIONES COMPLEMENTARIAS

3.1 MOVIMIENTOS INDUCIDOS POR EL SOPORTE

Desde el punto de vista de los aparatos de medida o de el comportamiento sísmico de los edificios es del mayor interés estudiar el caso en que nuestro modelo $\{m, c, k\}$ se encuentre sometido a un movimiento del soporte, según la ley $u(t)$.

En un instante determinado el alargamiento del muelle es, respecto a la posición inicial, $x-u$ y las fuerzas que actúan sobre la pieza rígida, son

$$k\,(x-u)$$

$$c\,(\dot{x}-\dot{u})$$

$$m\,(\ddot{x})$$

La correspondiente ecuación de equilibrio es

$$m\,\ddot{x}+c(\dot{x}-\dot{u})+k\,(x-u)=0$$

Si hacemos $\quad x-u=\delta \quad , \quad \ddot{x}=\ddot{\delta}+\ddot{u}$

$$m\,\ddot{\delta}+c\,\dot{\delta}+k\,\delta=-m\,\ddot{u}$$

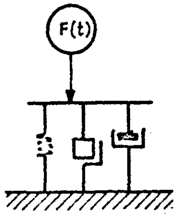
que tiene la misma forma que la ecuación base estudiada en el caso de vibraciones forzadas si en lugar de $f(t)$ se coloca $-m\,\ddot{u}(t)$

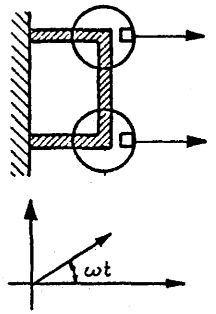
La solución general si la velocidad inicial es cero, es entonces

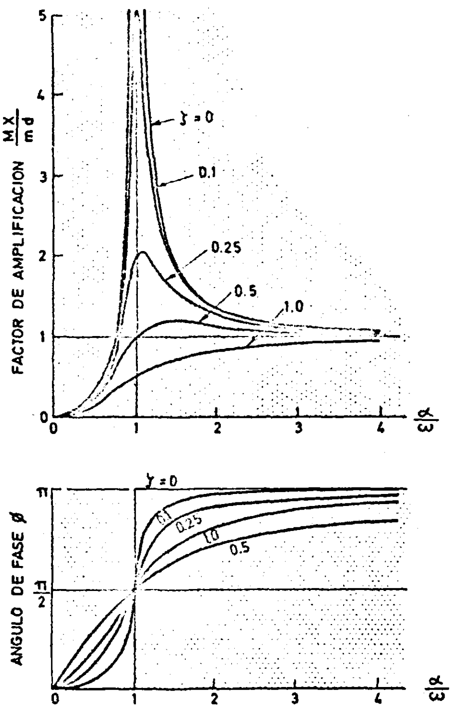
$$x-u=\delta=-\frac{1}{\omega}\int_{o}^{t} \ddot{u}(\tau)\, sen\,\omega\,(t-\tau)\, d\,\tau$$

para el caso de no existir amortiguamiento, o bien

$$x-u=\delta=-\frac{1}{w\sqrt{1-\zeta^2}}\int_{o}^{t} \ddot{u}(\tau)\, e^{-\zeta\, w\,(t-\tau)}\, sen\left[\, w\sqrt{1-\zeta^2}\,\right](t-\tau)\, d\,\tau$$







RESPUESTA DEL SISTEMA A UNA FUERZA PROPORCIONAL AL CUADRADO DE LA FRECUENCIA DE EXCITACION cuando hay amortiguamiento.

3.2. CARGA PROPORCIONAL A LA FRECUENCIA DE IMPULSION.INSTRUMENTOS SISMICOS.

Las máquinas en las que se encuentran masas giratorias con velocidad angular ω y con excentricidad d respecto al eje de giro sufren una fuerza centrífuga

$$F_c = \frac{m\,v^2}{r} = \frac{m\,a^2 d^2}{d} = m\,a^2 d$$

Si se toma como origen de tiempos el que corresponde a una situación en un eje horizontal, la componente no compensada sería

$$m\,a^2 d \cos a\,t = \Re\,[\,m\,a^2 d\,.\,e^{i\,a\,t}\,]$$

Utilizando resultados anteriores, la respuesta estacionaria es

$$x = \frac{m\,d\,a^2 .\, e^{i\,a\,t}}{M\,(\omega^2 - a^2 + 2\,i\,\zeta\,\omega\,a)} = \frac{m\,d\,a^2 e^{i\,a\,t}}{M\,\omega^2 [\,1 - \frac{a}{\omega}^2 + 2\,i\,\zeta\frac{a}{\omega}\,]}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{M}$$

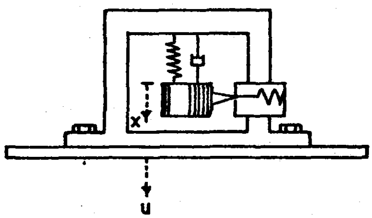
$$x = \frac{m\,d\,a^2}{k}\;\frac{e^{i\,a\,t}}{(1 - \frac{a^2}{\omega^2}) + i\,\frac{2\,\zeta\,a}{\omega}}$$

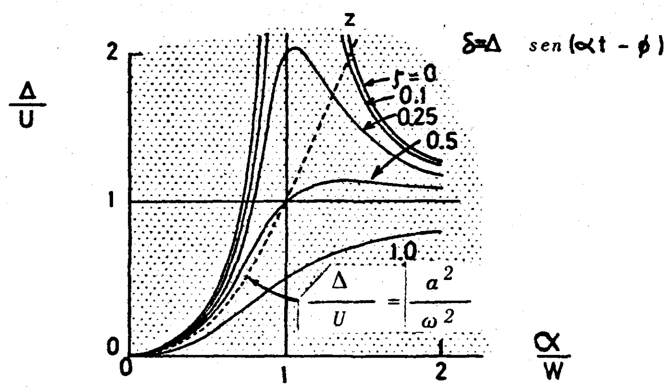
$$X = |\,x\,| = \frac{m\,d\,a^2}{k}\;\frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{a^2}{\omega^2})^2 + (2\,\zeta\frac{a}{\omega})^2}}$$

Como

$$\omega^2 = \frac{k}{M}$$

$$X = \frac{m\,d\,a^2}{M\,\omega^2}\;.\;\frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{a^2}{\omega^2})^2 + (2\,\zeta\frac{a}{\omega})^2}}$$





Respuesta del sistema a un movimiento $U(t)=U\ sen\ \alpha t$

(Steidel)

$$\boxed{\frac{M\,X}{m\,d} = \frac{\dfrac{a^2}{\omega^2}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{a^2}{\omega^2}\right)^2+\left(2\,\zeta\,\dfrac{a}{\omega}\right)^2}}}$$

que es el factor de amplificación.

Una aplicación inmediata de todo lo anterior se obtiene al estudiar el comportamiento de los instrumentos sísmicos, de los que la figura es un esquema simplificado.

Si se produce un movimiento $u\,(t)$ en el apoyo

$$m\,\ddot{x} + k\,(x-u) + c\,(\dot{x}-\dot{u}) = 0$$

El movimiento relativo registrado es $\delta = x - u$ por lo que

$$m\,\ddot{\delta} + c\,\dot{\delta} + k\,\delta = -\,m\,\ddot{u}$$

Si

$$u = A\cos a\,t,\quad \ddot{u} = -\,A\,w^2\cos a\,t = -\,w^2\,u$$

$$m\,\ddot{\delta} + c\,\dot{\delta} + k\,\delta = A\,m\,w^2\cos a\,t$$

es decir un caso igual al anterior por lo que si

$$\delta = \Delta\cos(a\,t-\phi)$$

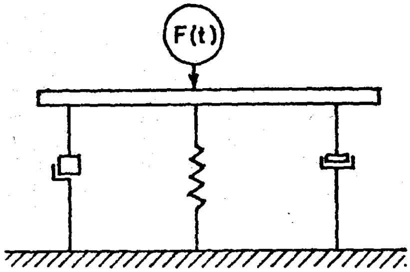
$$\frac{\Delta}{A} = \frac{\dfrac{a^2}{\omega^2}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{a^2}{\omega^2}\right)^2+\left(2\,\zeta\,\dfrac{a}{\omega}\right)^2}}$$

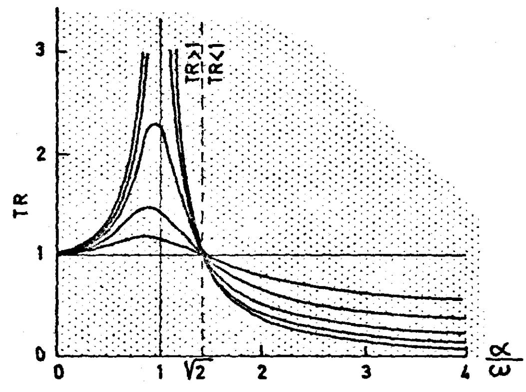
3. TRANSMISIBILIDAD Y AISLAMIENTO

La fuerza transmitida por el muelle es $k\,x$ y la transmitida por el amortiguamiento $c\,\dot{x}$

Si

$$\left.\begin{array}{l} x = X\,e^{i\,a\,t} \\ \dot{x} = i\,a\,X\,e^{i\,a\,t} \end{array}\right|\ \text{es decir } x \perp \dot{x}$$





TRANSMISIBILIDAD DEL SISTEMA

En valor absoluto el módulo de la fuerza transmitida es

$$F_{TR} = \sqrt{(k\,X)^2 + (c\,a\,X)^2} = X\sqrt{k^2 + c^2 a^2}$$

Si la fuerza es

$$F(t) = F\,e^{i a t}$$

se llama transmisibilidad al cociente

$$TR = \frac{F_{TR}}{F} = \frac{X}{F}\sqrt{k^2 + c^2 a^2}$$

que en función de datos anteriores se convierte en

$$TR = \sqrt{\frac{1 + (2\,\zeta\,\frac{a}{\omega})^2}{(1 - \frac{a^2}{\omega^2})^2 + (2\,\zeta\,\frac{a}{\omega})^2}}$$

Se observa fácilmente que la fuerza transmitida nunca es infinita para $a = \omega$, y que mientras que el amortiguamiento hace disminuir las amplitudes sea cual sea la frecuencia que se estudie, la TR solo disminuye si

$$\frac{a}{\omega} > \sqrt{2}$$

lo que es del máximo interés para el aislamiento de máquinas.

3. 4. LA ENERGIA EN EL SISTEMA VIBRANTE. MASA DEL MUELLE.

En un sistema conservativo la energía de la masa en movimiento puede ser cinética o potencial, pero en cualquier caso la energía total del sistema debe ser constante. Ello implica, en un movimiento oscilatorio, intercambio constante entre la energía cinética o potencial.

En nuestro caso

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2$$

es la energía cinética.

La energía potencial está formada por dos términos, la energía elástica y la energía de posición.

Si se toma como origen de medidas la posición de muelle descargado

$$V = \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

Poniendo

$$\frac{d}{dt}[T + V] = 0$$

se obtiene

$$m\,x\,\frac{d\dot{x}}{dt} + k\,x\,\frac{dx}{dt} = 0$$

es decir la conocida

$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0$$

Si se supone que el movimiento es armónico

$$V_{max} = \frac{1}{2}\,k\,x_{max}^2$$

$$T_{max} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}_{max}^2$$

Como $\dot{x}$ es máximo para $x = 0$ y al ser armónico aparece w como coeficiente, al igualar se obtiene

$$k = m\,\omega^2 \qquad \boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

El uso de los métodos energéticos permite corregir los resultados en el sentido de tener en cuenta el importante hecho de que los muelles reales no están desprovistos de masa.

En nuestro ejemplo

$$V = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \quad y \quad T = T_1 + T_2$$

siendo, como antes

$$T_1 = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2$$

y T_2 la correspondiente a la masa del muelle. Si se toma un elemento ds de muelle a la distancia s del extremo fijo y el peso por unidad de longitud es q

$$d\,T_2 = \frac{1}{2}\,\frac{q}{g}\,ds\,.\,\dot{s}^2$$

Si se admite que

$$\frac{\dot{s}}{s} = \frac{\dot{x}}{l}$$

$$\dot{s} = \frac{s}{l}\,\dot{x} = \chi\,\dot{x}$$

$$d\,T_2 = \frac{1}{2}\,\frac{q\,ds}{g}\,\chi^2\,\dot{x}^2$$

Si l es la longitud del muelle

$$T_2 = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{q \dot{x}^2}{g l^2} s^2 ds = \frac{1}{2} \frac{q \dot{x}^2}{g l^2} \frac{l^3}{3} = \frac{1}{2} [\frac{1}{3} \frac{q l}{g} \dot{x}^2]$$

Es decir, considerar la masa del muelle equivale a añadir $1/3$ de su masa a la general m.

$$T = \frac{1}{2} [m + \frac{1}{3} \frac{q l}{g}] \dot{x}^2$$

El factor $X(s)$ independiente de t, se suele llamar modo, fracción modal o forma modal y aparecerá profusamente cuando hablemos de sistemas con más grados de libertad.

3. 5. AMORTIGUAMIENTO. TIPOS. AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTE.

Hasta ahora siempre hemos considerado el tipo de amortiguamiento hidraúlico viscoso en que la fuerza que se opone al movimiento es linealmente proporcional a la velocidad.

Estrictamente hablando este caso solo se presenta en contados casos reales y su uso se generaliza porque al linearizar las condiciones de comportamiento permite resolver con comodidad las ecuaciones del movimiento; además cuando el amortiguamiento es pequeño, como sucede en el caso de las estructuras normales de la ingeniería civil (no especialmente diseñadas para amortiguar), siempre se puede utilizar un amortiguamiento viscoso equivalente.

Cuando el régimen hidraúlico es turbulento el amortiguamiento pasa a ser proporcional al cuadrado de la velocidad.

En el caso de fricción seca se presenta un amortiguamiento constante, o amortiguamiento de Coulomb.

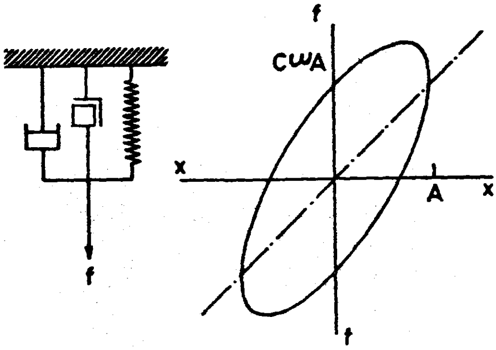
Finalmente el amortiguamiento interno, histerético o estructural responde al hecho de la no irreversibilidad de los fenómenos reales, lo que supone entre otras una pérdida de tipo calorífico. En las estructuras normales esta contribución es constante o disminuye cuando la frecuencia aumenta. (Una razón intuítiva sería que el flujo de calor no tiene tiempo de establecerse para las frecuencias altas).

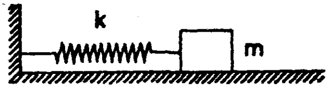
Existen dos hipótesis de trabajo para su estudio: la viscosidad generalizada y el planteamiento hereditario. El lector interesado puede consultar la obra de Volterra.

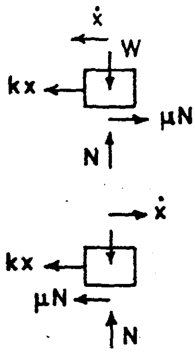
La energía disipada en cada ciclo para el caso del amortiguamiento viscoso se puede obtener haciendo un gráfico $(\mathfrak{F}, x)$.

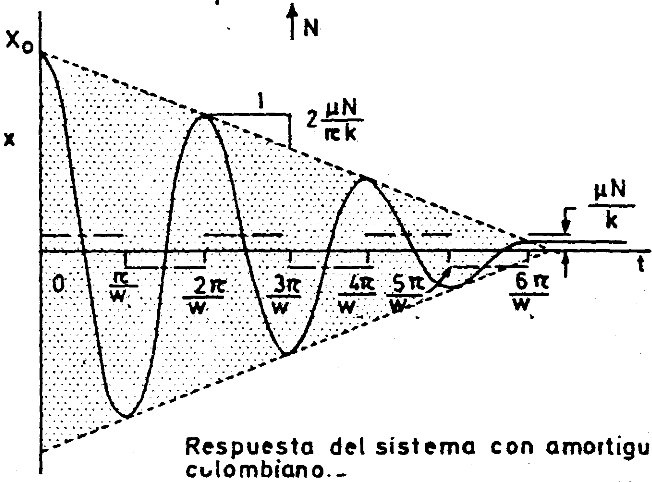
Como la ecuación del movimiento es

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0$$









Respuesta del sistema con amortiguamiento culombiano.-
(Desplazamiento X_0 desde la posición de equilibrio)

(Steidel)

la fuerza total que trabaja es $k\,x + c\,\dot{x} = f_t$

Si x es de tipo armónico

$$\left.\begin{array}{l} x = A\cos\omega t \\ \dot{x} = -A\,\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t \end{array}\right| \; f_t - k\,x = -\,c\,A\,\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$\boxed{\left(\frac{x}{A}\right)^2 \pm \left(\frac{f_t - k\,x}{c\,A\,\omega}\right)^2 = 1}$$

que también se podría poner

$$f_t = k\,x \pm c\,\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Si la energía es $U = f\,x$
la variación sería

$$\frac{\Delta U}{d\,t} = f\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)$$

que en un ciclo da

$$\Delta U = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f_t\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right) dt = \pi\,c\,\omega\,A^2$$

como se habría obtenido de haber hallado el área de la elipse $(\Im,\,x)$.

En el caso de amortiguamiento de Coulomb $f_z = K$ y como en cada ciclo se recorre 4 veces el consumo A $\Delta U = 4\,A\,K$
y el amortiguamiento equivalente

$$C = \frac{4\,K}{\pi\,\omega\,A}$$

La expresión $\Delta U = \pi\,c\,\omega\,A^2$ pone de manifiesto que la energía disipada crece con la frecuencia y ello explica el error que se introduce al tomar por viscoso un amortiguamiento interno donde el fenómeno que se produce es justamente el contrario.

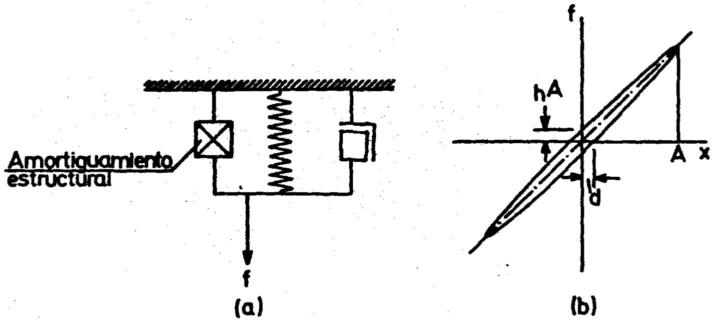
Un tratamiento sencillo consiste en utilizar una constante h en lugar del producto $c\,\omega$ a la que llamaremos <u>constante de amortiguamiento histerético.</u>

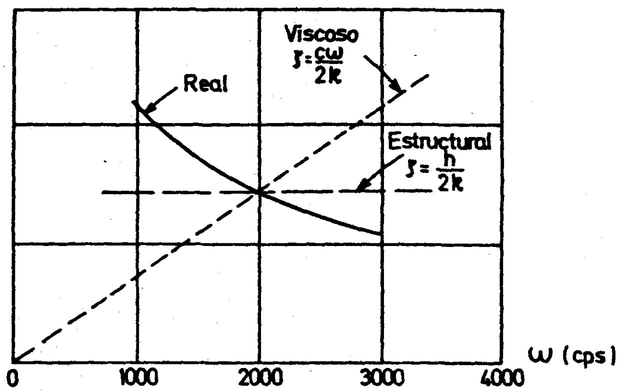
La fuerza a considerar es entonces

$$f_t = k\,x + \frac{h}{\omega}\,\dot{x}$$

y la energía disipada $\Delta U = h\,\pi\,A^2$

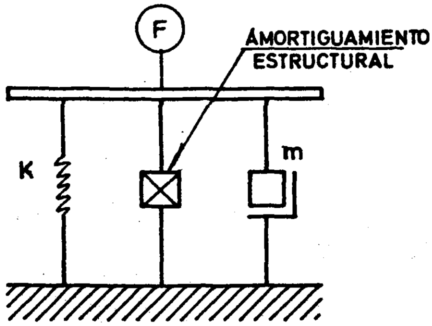
Si se dispone del grafico $(f,\,x)$ para $x = 0$ $f = \pm\,h\,A$
y para $f = 0$, $x = d$

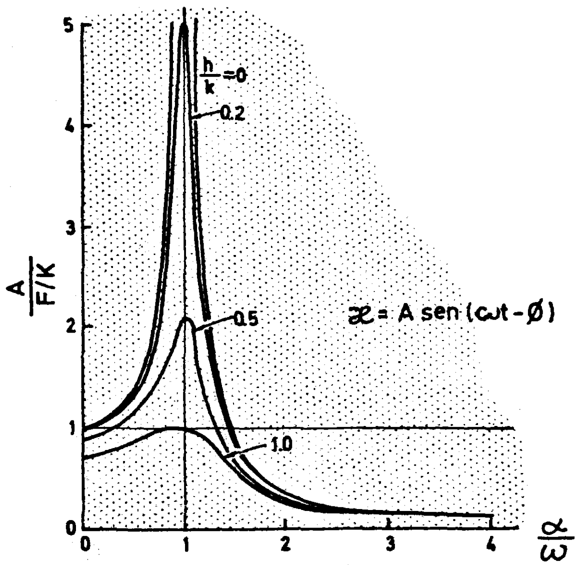


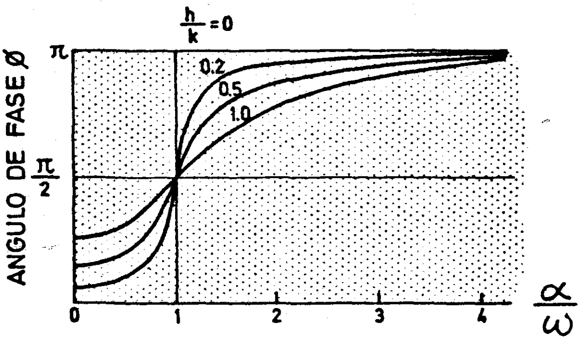


Variación del coeficiente de amortiguamiento en el acero al cromo.

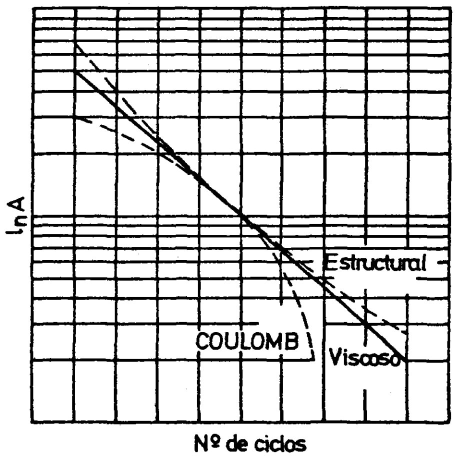
(Steidel)







RESPUESTA DEL SISTEMA CON AMORTIGUAMIENTO ESTRUCTURAL A UNA $F(t) = Fe^{i\alpha t}$


lnA
Estructural
COULOMB
Viscoso
Nº de ciclos

$$k\,d = \pm h \sqrt{A^2 - d^2}$$

$$\frac{h}{k} = \frac{d}{\sqrt{A^2 - d^2}}$$

Si el amortiguamiento es ligero d es pequeño comparado con A y

$$\frac{h}{k} \approx \frac{d}{A}$$

todo ello permite obtener las características de h de gráficos experimentales.

Respecto al decremento logaritmico histerético se define a partir del viscoso

$$\delta = \frac{\pi c}{m\,\omega_d};\ \delta_h = \frac{\pi h}{m\,\omega_d^2} \approx \frac{\pi h}{k}$$

en los casos $\omega_d \approx \omega$ y analogamente al porcentaje de amortiguamiento histerético crítico

$$\zeta_h = \frac{\delta}{2\pi} \approx \frac{h}{2k}$$

En la figura hemos dibujado el caso del acero al cromo lo que permite observar la diferencia de comportamiento con el caso viscoso.

En general el tipo de amortiguamiento que se presente dependerá de las condiciones de la estructura. (Para valores típicos puede verse el tomo II de la obra de Hacar y colaboradores) y podrá ser incluso una combinación de los tres. Una solución para distinguirlos puede ser presentar los resultados de medidas en un gráfico $lg\,A$ versus número de ciclos de vibración libre.

Como

$$\delta = \frac{1}{n}\, l_n \frac{A_o}{A_n}$$

si el amortiguamiento es viscoso la relación será lineal.

En el caso de amortiguamiento de Coulomb la curva presenta la concavidad hacia N y en el caso de amortiguamiento estructural hacia arriba.

3.6. BIBLIOGRAFIA

El sistema con un grado de libertad viene expuesto con claridad en todos los libros que tratan del tema. Merecen citarse los siguientes:

1) Biggs: Introduction to structural dynamics. Mc Graw 1964
Trata con cuidado tanto el aspecto numérico como el análisis riguroso y extiende el método de Krall referente a la simplificación de sistemas de un grado de libertad. Imprescindible para el Ingeniero práctico.

2) Hacar y otros: Elementos de Dinámica aplicada a las estructuras (2 tomos) 1970 y 1972.
Reune abundantes datos sobre métodos de análisis y simplificación. En el segunto tomo se aplica sobre numerosos temas concretos.

*3) Hartog: Vibrationes mécaniques. Dunod 1960.
Junto con 9) es el libro más clasico e interesante por sus fecundas analogías, interpretaciones y ejemplos.

4) Hwei P. Hsu: Análisis de Fourier. Fondo E.I.S.A. 1973.
Una magnífica colección de ejercicios muy útil para hacerse con las técnicas de Fourier.

5) Jacobsen y Ayre: Engineering vibrations. Mc Graw 1958.
Trata temas tan interesantes como el del plano de fase y acumula la mayoría de los cuadros para impulsos que han sido publicados. Enfoque tradicional y gran cantidad de bibliografía.

6) Lin: Probabilistic theory of structural dynamics. Mc Graw 1967.
Es el libro más claro sobre teoría probabilística escrito hasta la fecha. El capítulo 5 expone brevemente el tema del que nos hemos ocupado.

7) Mc Lachlan: Theory of vibrations. Dover.
Es un breve librito de 152 páginas en las que tienen cabida, con gran claridad expositiva, todos los conceptos que nos interesan. Es especialmente interesante el enfoque en el campo de la frecuencia.

8) Steidel: An introduction to mechanical vibrations. J. Wiley 1971.
Es un libro a nivel de estudiante muy práctico y muy claro. A destacar los problemas propuestos siempre a partir de un modelo real que se simplifica progresivamente. Muy formativo.

9) Timoshenko: Problemas de vibración en ingeniería, Cecsa. 1960. Es el libro clásico por excelencia con la altura y claridad característica del autor. Sigue siendo útil.

10) Volterra y Zachmanoglu: Dynamics of vibrations. Merrill 1965. Un original enfoque científico del problema sin alejarse de la realidad. Muy interesante el estudio de los temas de propagación de ondas y el tratamiento del amortiguamiento histerético.

Problema 1

Obtener una expresión para la frecuencia de vibración vertical de una masa m colgada de una pieza de elongabilidad

$$\frac{ds}{EA}$$

constante.

$$\boxed{k = \frac{EA}{L} \qquad \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{EA}{mL}, \boxed{\omega = \sqrt{\frac{EA}{mL}}}}$$

Problema 2

Obtener la expresión de la frecuencia de vibración de una masa colocada en el extremo de una viga simplemente apoyada de luz L y voladizo aL.

$$\omega^2 = \frac{3EI}{a^2 L^3 m (1 + a)}$$

Problema 3

Obtener la respuesta $a(t)$ del sistema vibrante al escalón de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Si el sistema estaba en reposo $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ es decir

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} u(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$$

Si $t = \infty$

$$a(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-1\,\omega\,\tau}\, d\tau \quad _{\omega = 0} = H(\omega) \quad _{\omega = 0} = H(0)$$

Problema 4

Obtener la respuesta de un sistema como suma continua de las respuestas a la función de Heaviside.

Si llamamos función de Heaviside a

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 0, & si \quad t < \tau \\ 1 & \quad\quad t > \tau \end{cases}$$

la primera componente es $f(0)\,.\,u(t)$

y si se toma un paso $\Delta\tau$ la segunda estaría en $t = \Delta\tau$ y su escalón sería $f'(t)\,\Delta\tau$ con expresión

$$f'(t)\,\Delta\tau \;\; u(t - \Delta\tau)$$

y, en general, el escalón correspondiente a τ

$$f'(\tau)\,.\,\Delta\tau\,.\,u(t-\tau)$$

Así

$$f(t) = f(0)\, u(t) + \lim_{\Delta\tau = 0} \sum_{0}^{t} f'(\tau)\,.\,\Delta\tau\,.\,u(t-\tau)$$

Si la respuesta a $u(t)$ es llamada $a(t)$, la respuesta a $f(t)$ podrá ser escrita como

$$x(t) = f(0)\;\; a(t) + \int_{0}^{t} f'(\tau)\,.\,a(t-\tau)\, d\tau$$

Problema 5

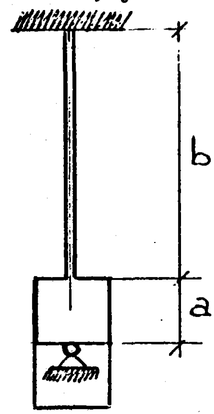
Expresión de la frecuencia de vibración horizontal para la masa concentrada en la esquina de un pórtico de luz b y altura a.

$$k = \frac{3EI}{a^2(a+b)}$$

$$\omega^2 = \frac{3EI}{a^2(a+b)\,m}$$

Problema 6

Obtener la frecuencia de vibración en giro de una masa, unida a un eje flexible de rigidez EI del modo que se indica, y con momento de inercia $\Im_m$ respecto al eje de la rótula.



$$k = \frac{12EI\left(a^2 + ab + \frac{1}{3}b^2\right)}{b^3}$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{12EI\left(a^2 + ab + \frac{1}{3}b^2\right)}{\Im_m\, b^3}}$$

Problema 7

Una estructura está formada por un dintel horizontal BC que pesa 3 toneladas, soportado por dos pilares muy ligeros AB y CD cada uno con una rigidez a flexión de $4\ t/cm$

1) Obtener la frecuencia natural de las vibraciones horizontales de BC.

2) Si se provoca un desplazamiento de 2 cm. y se suelta el dintel obtener la ecuación del movimiento.

3) Al registrar las vibraciones libres se observa que el desplazamiento máximo de cada oscilación es un 10% inferior al de la oscilación anterior ¿ Cuál es el amortiguamiento, el decremento logaritmico y ζ ?

1)

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{kg}{p} = \frac{2 \times 4 \times 980}{3}, \quad \omega = 51{,}2$$

$$\boxed{\nu = \frac{51{,}2}{2\pi} = 8{,}16\ cps.}$$

2) $$x = A \cos \omega t + B \,\mathrm{sen}\, \omega t$$

para

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{ll} x = 2 \text{ cm} & A = 2 \\ \dot{x} = 0 & B = 0 \end{array} \right\} \quad x = 2 \cos 8{,}16\, t$$

3)

$$L_n \frac{1}{0{,}9} = \delta = 0{,}105$$

$$\delta \approx 2\pi\zeta \ , \quad \zeta = \frac{0{,}105}{2\pi} = 0{,}0168$$

$$c_{crit} = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{\frac{8 \times 3}{980}} = 0{,}314$$

$$c = \zeta\, c_{crit} = 5{,}3 \,.\, 10^{-3} \text{ ton/ (cm/seg)}$$

Problema 8

Instrumental aislado contra la vibración está situado en. la cabeza de un cohete. Si éste es disparado con una aceleración $\ddot{u} = b\,t$ se pide encontrar la forma del desplazamiento relativo del instrumental respecto al cohete y la aceleración absoluta en función del tiempo. (Steidel).

$$x - u = \delta \ , \quad x = \delta + u$$

$$m\ddot{x} + k\,\delta = 0$$

$$m\ddot{\delta} + k\,\delta = -m\ddot{u}$$

$$m\ddot{\delta} + k\,\delta = -m\,b\,t \qquad \delta = \frac{b\,t}{\omega^2}$$

$$\ddot{\delta} + \omega^2\delta = -b\,t$$

$$\delta = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t - \frac{b\,t}{\omega^2}$$

$$t = 0 \quad \delta = 0 \quad A = 0$$

$$\dot{\delta} = B\,\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t - \frac{b}{\omega^2} \left\{ \begin{array}{l} t=0 \\ \dot{\delta} = 0 \end{array} \right. \quad B\,\omega = +\frac{b}{\omega^2}$$

$$B = + \frac{b}{\omega^3}$$

$$\boxed{\delta = \frac{b}{\omega^2}\left(1 + \frac{1}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t\right)}$$

$$\dot{\delta} = \frac{b}{\omega^2} + \frac{b}{\omega^2}\cos\omega t$$

$$\ddot{\delta} = -\frac{b}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t$$

$$\boxed{\ddot{x} = b\,t\left(1 - \frac{\text{sen}\,\omega t}{\omega t}\right)}$$

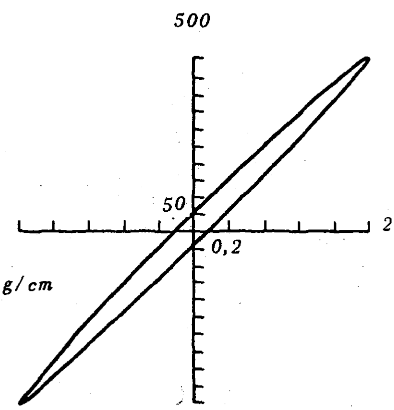
Problema 9

Cuando una estructura elástica es cargada y descargada la curva fuerza-corrimiento es un lazo de histéresis.

Determinar el porcentaje de amortiguamiento histerético.

Como

$$\zeta_h = \frac{h}{2k}$$



de la figura $50\ kg. = h\ .\ 2\ (cm)$

$$h = \frac{50}{2} = 2{,}5\ kg/cm$$

$$\frac{h}{k} \approx \frac{0{,}2}{2} = 0{,}1 \quad , \quad k = \frac{h}{0{,}1} = 250\ kg/cm$$

$$\left[\zeta = \frac{25}{500} = 5.10^{-2}\right]$$

Problema 10

Cuando una estructura es cargada y descargada los datos de carga y movimientos son los siguientes:

Carga Kg.	0	400	700	770	800	800	600	200	-200	-600	-900	-970	-1000	-1000	-800	-400
Corrimiento cm	0	0,4	0,7	0,8	0,9	1	0,8	0,4	0	-0,4	-0,7	-0,8	-0,9	-1	-0,8	-0,4

Estimar, a partir de ellos, el amortiguamiento interno h, el decremento logaritmico δ_h y el porcentaje ζ de amortiguamiento crítico.

El área de la curva es ΔU y $h = \dfrac{\Delta u}{\pi x^2}$

El valor de k se obtiene de la pendiente.

También se pueden estimar los datos a partir de la abscisa y ordenada en el origen.

Respuesta:

$$h = 114 \ kg/cm$$

$$\delta_h = 0,36$$

$$\zeta = 0,0575$$

Problema 11

El dintel de un pórtico rectangular está formado por dos $UPN\ 12$ y sobre él actúa un motor en el que hay un peso, no equilibrado en vertical de 40 Kg con excentricidad 0, 1 cm. Si el número de revoluciones es 3000 rpm y el peso del motor 180 kg. se pide obtener las tensiones máximas en la viga del dintel. $\zeta = 3\%$.

$$UPN\ 12 \begin{cases} I_x = 364 \ cm^4 \\ W_x = 60,7 \ cm^3 \\ A = 17 \ cm^2 \\ peso = 13,4 \ Kg/m \end{cases}$$

El peso de la viga es de

$$13,4 \times 1,5 = 20 \ kg << 180$$

La constante de muelle del pórtico, si se desprecia la deformación de los pilares, sería

$$k = \frac{48 \ E \ I}{L^3}$$

y la frecuencia circular $\qquad \omega^2 = \dfrac{48 \ E \ I}{L^3 \ M}$

$$\omega = \sqrt{\frac{48 \times 2,1 \times 10^6 \times 2 \times 364 \times 980}{15^3 \ . \ 10^6 \ . \ 180}} = 344 \ seg^{-1}$$

La frecuencia de la fuerza impulsora es

$$a = \frac{3000}{60} 2\pi = 314 \ seg^{-1}$$

El factor de amplificación sería

$$\frac{M X}{m_o e} = 6,55$$

$$X_{max} = 6,55 \cdot \frac{40}{180} \, 0,1 = \frac{0,655.4}{18} = 0,145 \ cm$$

Mientras que

$$X_{st} = \frac{1,80 \times 1,5^3 \times 10^6}{48 \times 2,1 + 10^6 = 7,28} = 0,017 \ cm$$

Como

$$\frac{X_{max}}{X_{st}} = 8,5$$

y las tensiones estáticas son

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W} = \frac{P L}{4 W} = \frac{180 \times 150}{4 \times 2 \times 60,7} = 56 \ kg/cm^2$$

$$\sigma_{dinamica} = 56 \times 8,5 = 475 \ kg/cm^2$$

Problema 12

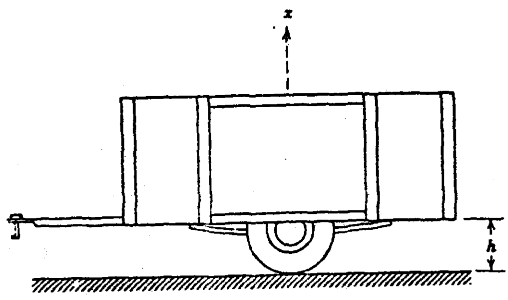
Un anillo de masa M se deja caer bruscamente desde una altura h sobre el extremo de un hilo sin masa de elongabilidad constante. Calcular el alargamiento máximo.

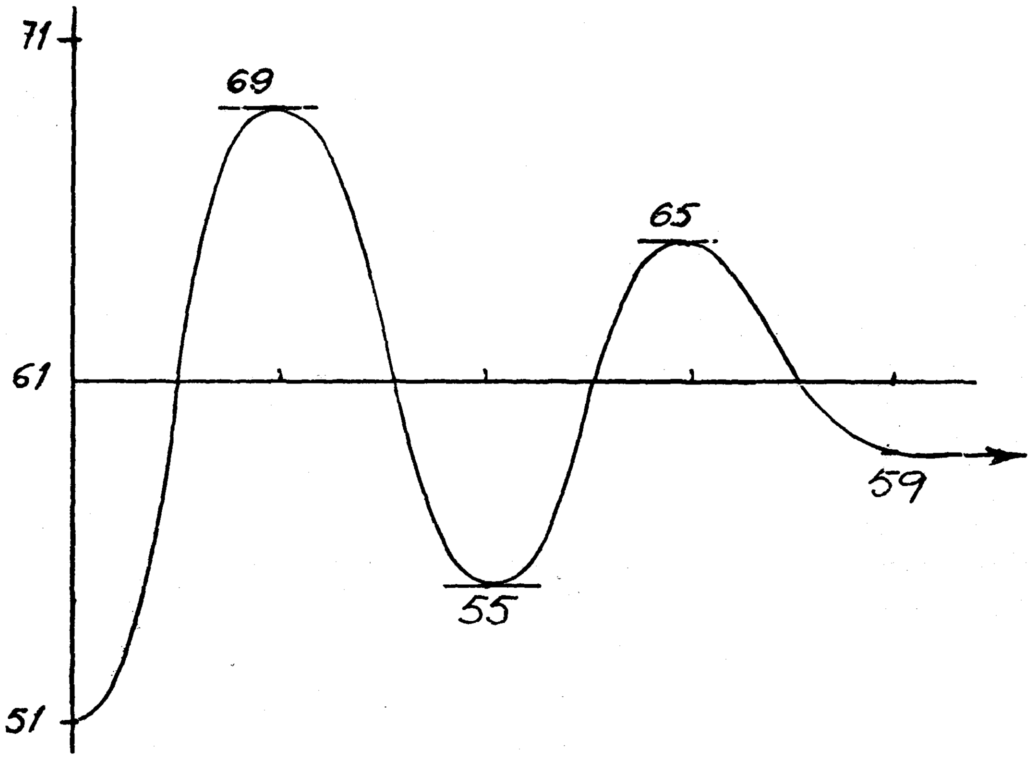
$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + 2 h \delta_{st}}$$

Problema 13

Obtener la frecuencia de vibración radial de un anillo delgado de radio r y masa ρ por unidad de longitud.

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{\rho r^2}}$$


x
h


71
69
65
61
59
55
51

Problema 14

Un trailer está colocado sobre un eje mediante dos muelles de ballesta con rozamiento de Coulomb. Si el trailer es descargado $h = 60\ cm$ si el trailer es depositado vacío en el suelo $h = 62\ cm$

Estimar el número de ciclos de vibración libre que experimentará. (Steidel).

La posición de equilibrio corresponde a $h = 61\ cm$ pues en el primer caso el rozamiento impide la recuperación total al igual que en el segundo la deformación total.

$$1\ cm = \frac{\mu N}{k} \quad , \quad 4\,\frac{\mu N}{k} = 4\ cm.$$

Como

$$X_{n+1} = X_n - \frac{4\,\mu N}{k} \longrightarrow \begin{array}{l} x_2 = 10 - 4 = 6 \\ x_3 = 6 - 4 = 2 \end{array}$$

lo que se establece el equilibrio.

El trailer quedará en reposo tras dos ciclos y a una altura de 59 cm respecto al suelo.

La fuerza de las ballestas no es suficiente para vencer el rozamiento.

Problema 15

Un plotter tiene unas velocidades límites

$$v_x = 7\ cm\ seg^{-1}\ ,\ v_n = 4\ cm\ seg^{-1}$$

y unas aceleraciones de $a_x = 35\ cm\ seg^{-2}$. $a_y = 20\ cm\ seg^{-2}$

Para las condiciones límites ¿ Cuál es el mínimo radio de curvatura que la pluma puede seguir si la aceleración a_x es positiva y la a_y es negativa? ¿ sería idéntica la contestación para aceleraciones ay positivas? (Steidel).

Como la aceleración normal es

$$\frac{v^2}{\rho}$$

$$a_x\ sen\ a + a_y\ cos\ a = \frac{v_x^2 + v_y^2}{\rho}$$

$$tg\ a = \frac{v_y}{v_x}\ ,\ sen\ a = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\ ,\ cos a \frac{v_x}{\sqrt{v_n^2 + v_y^2}}$$

$$\rho = \frac{(v_x^2 + v_y^2)^{3/2}}{a_x v_y \dot{+} a_y v_x}$$

Se ve fácilmente que el cambio de sentido de a_y influiría en el resultado

$$\rho = \frac{(49 + 16)^{3/2}}{35 . 4 + 7 . 20} = \frac{65^{3/2}}{140 + 40} = \frac{515}{280} = 1{,}84\ cm$$

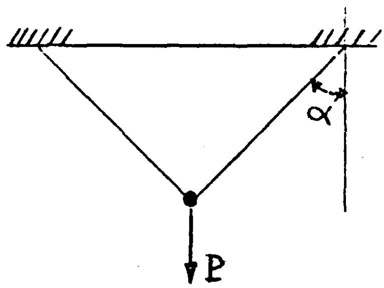
Problema 16

¿ Cuál es, en función de la tensión estática, la tensión que se produce en el cable de suspensión de un peso si se corta el otro ? .

$$\Sigma F_r = m a_r = 0$$

$$T - P\ cos\ a = 0$$

$$T = P\ cos\ a$$



En el caso de equilibrio

$$\frac{P}{2} = T_{st}\ cos\ a\ ,\quad T_{st} = \frac{P}{2\ cos\ a}$$

$$T = 2\ cos^2 a\ T_{st}$$